

2019年天津河东区天津市第七中学高三一模文科数学试卷

一、选择题

爱智康 (本大题共8小题, 每小题5分, 共40分)

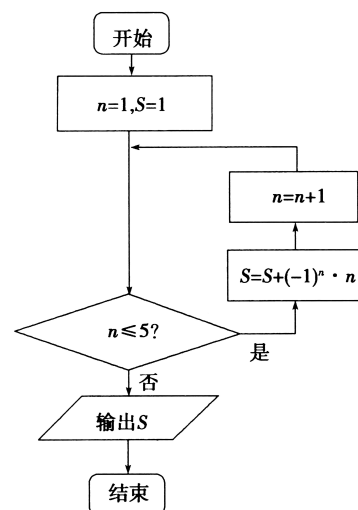
1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{1-3i}{1+2i} = ()$.

- A. $1+i$ B. $5+5i$ C. $-5-5i$ D. $-1-i$

2. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ x-y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值是 ().

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. -1

3. 运行下图所示的程序框图, 则输出的 S 值为 ()



- A. 3 B. -2 C. -3 D. 2

4. 已知命题 p : " $a=2$ ", 命题 q : "直线 $x+y=0$ 与圆 $x^2+(y-a)^2=2$ 相切", 则 p 是 q 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. $a = \log_{0.2} 3$, $b = \log_3 2$, $c = 2^{-3}$, 则 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

6. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 恰好是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 且双曲线过点 $\left(\frac{3a^2}{p}, \frac{2b^2}{p}\right)$, 则该双曲线的渐近线方程为 ().

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}x$ C. $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}x$

7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 给出下列四个命题:

① $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴间的距离为 π ;

② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称;

③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数;

④ 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 其中正确的命题为 ().

A. ①③

B. ①②③

C. ②③

D. ①②④

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $|f(x)| + a \geq ax$, 则 a 的取值范围是 ().

A. $[-2, 0)$

B. $[0, 1]$

C. $(0, 1]$

D. $[-2, 0]$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 < x < 4, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subset B$, 则实数 a 取值范围是 _____.

10. 已知函数 $f(x) = 2f'(1) \ln x - x$, 则 $f(x)$ 的极大值为 _____.

11. 长方体的三个相邻面的面积分别为1, 2, 2, 这个长方体的顶点都在同一个球面上, 则这个球的体积为 _____.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = -13$, $a_6 + a_8 = -2$, 且 $a_{n-1} = 2a_n - a_{n+1} (n \geq 2)$, 则数列的 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n-1}}\right\}$ 的前13项和为 _____.

13. 已知向量 $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (x, y - 1)$, 且 $\vec{a} // \vec{b}$, 若 x, y 均为正数, 则 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值是 _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 2$, 若点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{AC}$ 的值为 _____.

三、解答题

(本大题共6小题，共80分)

15. 已知某中学高三文科班学生的数学与语文的水平测试成绩抽样统计如下表：

人数 语文 (y) \ 数学 (x)	90分~ 100分 (数A)	80分~ 90分 (数B)	60分~ 80分 (数C)
90分~ 100分 (语A)	20	7	5
80分~ 90分 (语B)	18	9	6
60分~ 80分 (语C)	4	a	b

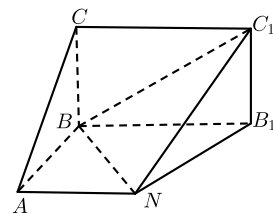
设 x, y 分别表示数学成绩与语文成绩，若抽取学生 n 人，成绩在 90 分—100 分者记为 A 等级（优秀），成绩在 80 分—90 分者记为 B 等级（良好），成绩在 60 分—80 分者记为 C 等级（及格）。例如：表中数学成绩为 A 等级的共有 $20 + 18 + 4 = 42$ 人。已知 x 与 y 均为 B 等级的概率是 0.09。

- (1) 若在该样本中，数学成绩良好率是 30%，求 a, b 的值。
- (2) 在语文成绩为 C 等级的学生中，已知 $a \geq 10, b \geq 8$ ，求数学成绩为 B 等级的人数比 C 等级的人数少的概率。

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $a \sin C = \sqrt{3}c \cos A$ 。

- (1) 求角 A 的大小。
- (2) 若 $c = 4, a = 5\sqrt{3}$ ，求 b 及 $\cos(2C - A)$ 的值。

17. 已知如图，矩形 BCC_1B_1 所在平面与底面 ABB_1N 垂直，在直角梯形 ABB_1N 中， $AN \parallel BB_1$ ， $AB \perp AN$ ， $CB = BA = AN = 4$ ， $BB_1 = 8$ 。



- (1) 求证： $BC \parallel$ 平面 C_1B_1N 。
- (2) 求证： $BN \perp$ 平面 C_1B_1N 。
- (3) 求 BB_1 与平面 C_1BN 所成角的正弦值。

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = a (a \neq 0)$, $a_{n+2} = p \cdot \frac{a_{n+1}^2}{a_n}$, (其中 p 为非零常数, $n \in N^*$) ,

(1) 判断数列 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 是不是等比数列?

(2) 求 a_n .

(3) 当 $a = 1$ 时, 令 $b_n = \frac{na_{n+2}}{a_n}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 S_n .

19. 已知中心在坐标原点 O ，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 椭圆过点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于 P, Q 两点，满足直线 OP, PQ, OQ 的斜率依次成等比数列，若 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求直线 l 与 y 轴交点的坐标.

20. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax (a > 0)$, $g(x) = bx^2 + 2b - 1$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线, 求 a, b 的值.

(2) 当 $a = 2b + 1$ 时, 若函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围.

(3) $h(x) = kx^2 + (1 - k^2)x - ax (k < 0)$, 求函数 $G(x) = f(x) - h(x)$ 在区间 $[2k, -2k]$ 上的最小值.